TRABALHANDO ALGUNS CONCEITOS DE ÁLGEBRA COM O CUBO MÁGICO

Vânia Cristina da Silva Rodrigues, Brunno Freitas Silva
vaniacs.rodrigues@gmail.com, brunnofreitassilva@hotmail.com
Universidade Federal do Triangulo Mineiro (UFTM) – Brasil

Tema: Pensamento Algébrico
Modalidade: MC
Nível educativo: Terciário - Universitário
Palavras-chave: Jogos didáticos; cubo de mágico; operação inversa; comutativa.

Resumo

As dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem de Álgebra perpassam pela forma como esta é abordada nos livros didáticos e na sala de aula pelo professor. Um dos focos que chama muito a atenção é a possibilidade de tornar a Álgebra mais significativa e motivadora para o aluno, utilizando recursos que sejam eficazes e renovem o seu ensino. Dessa forma, a presente proposta de minicurso tem o objetivo apresentar aos professores dos Ensinos Fundamental e Médio as possibilidades metodológicas do Cubo Mágico no que se refere ao trabalho com alguns conceitos da Álgebra, tais como propriedades de uma operação e, dessa forma possibilitar a construção/reconstrução destes conceitos. Inicialmente faremos uma apresentação do Cubo Mágico com destaque para suas possibilidades lúdicas e educativas. Em seguida apresentaremos alguns conceitos da Álgebra que podem trabalhados a partir do Cubo. E por fim, aplicaremos a teoria formulada para a resolução do mesmo.

Introdução

As dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem de Álgebra perpassam pela forma como esta é abordada nos livros didáticos e na sala de aula pelo professor. Desta forma, um dos focos que chama muito a atenção é a possibilidade de tornar a Álgebra mais significativa e motivadora para o aluno utilizando recursos que sejam eficazes e renovem o ensino. Conforme destaca (Kaput, 2005), a visão tradicional da Álgebra está relacionada com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. Assim, a Álgebra escolar tem servido para ensinar um conjunto de procedimentos que, na visão dos alunos, não têm relação com outros conhecimentos matemáticos e nem com o seu mundo cotidiano.

Além disso, para o autor, a Álgebra tem se dedicado a capacitar os estudantes para produzir sequências de símbolos corretas e não tem focado na compreensão dos conceitos e do raciocínio matemático. As aplicações utilizadas são muitas vezes artificiais, e os alunos não têm a oportunidade de refletir sobre as suas próprias experiências, nem de articular os seus conhecimentos, memorizam procedimentos que são assumidos como operações sobre sequências de símbolos e que resolvem problemas artificiais sem significado.

A presente proposta de minicurso tem o objetivo apresentar aos professores dos Ensinos Fundamental e Médio a possibilidades metodológicos do Cubo Magico no que se refere ao trabalho com alguns conceitos da Álgebra, tais como as propriedades de uma operação e, dessa forma possibilitar a construção/reconstrução destes conceitos.

Utilizaremos o Cubo Mágico para estimular a percepção individual dos conceitos matemáticos relacionados à Álgebra e o raciocínio. (Moura,1992) cita que pesquisadores como Piaget, Vygotsky, Elkonin, Liontiev, Rosário, Kami entre outros, justificam a utilização do jogo como fator de aprendizagem. Os jogos são recomendados por estimularem as relações cognitivas, afetivas, verbais, psicomotoras e sociais.

Além disso, o jogo em si permite que o professor, através da observação dos alunos jogando, conheça não só como cada um está lidando com o conteúdo educacional objeto do jogo, mas também perceba os aspectos comportamentais, de liderança, cooperação e ética. Por meio de atividades lúdicas o professor pode colaborar com a elaboração de conceitos; reforçar conteúdos; promover a sociabilidade entre os alunos; trabalhar a criatividade; o espírito de competição e a cooperação (Fialho, 2008).

Vários objetivos cognitivos podem ser alcançados pelo uso de jogos. (Grando,1995) destaca que nos jogos os procedimentos de raciocínio, as regras, as tomadas de decisões e a elaboração de estratégias são equivalentes aos elementos necessários ao pensamento matemático.

Metodologia

O minicurso tem o objetivo de fomentar a discussão sobre como trabalhar alguns conceitos da Álgebra a partir do Cubo Mágico. Dessa forma temos o intuito de propiciar um ambiente de discussão e reflexão sobre utilização do Cubo Mágico, a fim de que os participantes possam avaliar as potencialidades deste recurso pedagógico. Para tanto, o minicurso foi dividido em três momentos: em um primeiro momento apresentaremos o Cubo Mágico com destaque para seu potencial lúdico e educativo; sua terminologia; seus movimentos. Em seguida, realizaremos uma discussão de como alguns conceitos da Álgebra tais como operação inversa, comutatividade, elemento neutro etc., podem trabalhados e ilustrados a partir do Cubo Mágico. E por fim, aplicaremos a teoria apresentada na resolução do Cubo.

Os participantes do minicurso terão a oportunidade de jogar o Cubo Mágico, com o intuito de avaliarem o seu potencial lúdico e pedagógico. As discussões propostas terão o intuito de propiciar a troca de experiências entre os participantes, levando-os a uma reflexão sobre teoria e a prática. Além disso, como forma de avaliação, os participantes deverão elaborar uma atividade que eles possam aplicar na sala de aula e que utilize o Cubo Mágico como ferramenta didática.

Conhecendo o Cubo Mágico

Em 1974, preocupado em ilustrar o conceito de terceira dimensão para seus alunos, Ernő Rubik, professor do Departamento de Desenho de Interiores na Academia de Artes e Trabalhos Aplicados em Budapeste (Hungria), criou o protótipo do Cubo de Rubik.
A primeira peça era de madeira, com cada uma das seis faces pintadas de cores diferentes, desta forma quando alguém girasse as faces do cubo, teria uma visualização melhor dos movimentos realizados. Após realizar alguns movimentos e tentar voltar o cubo a sua formação original, Rubick percebeu ter criado um quebra-cabeça, pois demorou cerca de um mês para conseguir voltar o cubo a sua configuração original.

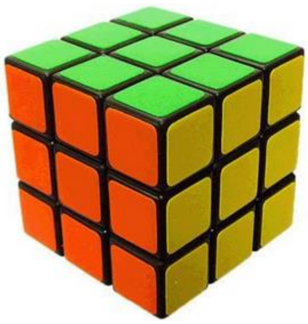

Figura 1: Cubo Mágico. Fonte: Própria

O Cubo de Rubik é geralmente confeccionado em plástico e possui várias versões, sendo a versão $3 \times 3 \times 3$, composta por 6 faces de 6 cores diferentes, com arestas de aproximadamente 5,5 cm a mais comum.
Observe que o Cubo:

- ✓ É formado por 27 cubinhos, um é virtual que está no centro do Cubo, sendo 9 em cada face.
- ✓ Cada cubinho tem 6 facetas, mas só são visíveis as que apontam para fora do Cubo.
- ✓ Há três tipos de cubinhos: *centrais*, de *arestas* e de *cantos*.

É usual indicar as faces do Cubo pela primeira letra de seus respectivos nomes em inglês: ***Front*** (face frontal) aquela que esta virada para nós, a face posterior é chamada de ***Back***; a face superior recebe o nome de ***Upper*** e a inferior ***Down***, a face esquerda e chamada de ***Left*** e a direita de ***Right***.

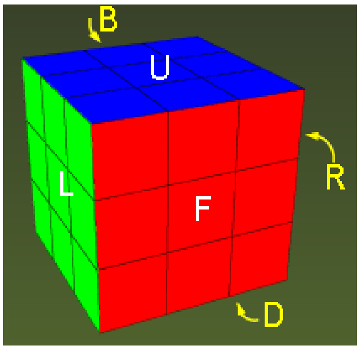

Figura 2: Faces do Cubo. Fonte: Schültzer (2005, p. 4)

Cada face pode ser girada de um quarto de volta ou de meia volta, tanto no sentido horário quanto no anti-horário. Costuma-se indicar os respectivos movimentos de um quarto de volta em sentido horário por F, U, D, L e R.

Desse modo a letra F indica ao mesmo tempo a face do cubo que sempre fica apontada em nossa direção e girar a essa face em sentido horário de um quarto de volta. Convém ressaltar que os movimentos alteram a configuração das facetas dos cubinhos, mas preservam a forma geral do cubo, por isso são chamados *simetrias* do cubo.

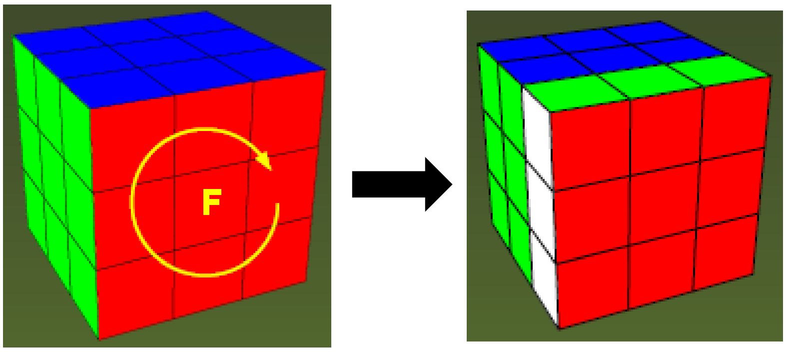

Figura 3: Movimento F. Fonte: Schültzer (2005, p. 6)

A Álgebra do Cubo Mágico

Apresentaremos alguns dos conceitos que podem ser trabalhados/ilustrados utilizando o Cubo Mágico.

b) Operações Comutativas e Não Comutativas

A princípio pode parecer óbvio, mas a ordem em que aplicamos os movimentos no Cubo faz diferença. Observe que aplicar o movimento F seguido R é diferente de aplicar o movimento R seguido de F. Isto não ocorre quando multiplicamos dois números, ou seja, $7 \times 9 = 9 \times 7$. De modo geral, se a e b são números reais quaisquer então $a \cdot b = b \cdot a$.

Quando a ordem não importa no resultado da operação, como na multiplicação de dois números reais, nós chamamos a operação de *comutativa*. A comutativade nos permite simplificar expressões do tipo $b^2a^3c^2a^2b^5c = a^{(3+2)}b^{(2+5)}c^{(2+1)} = a^5b^7c^3$. Por outro lado, quando a ordem em que os elementos são operados interfere no resultado, como na multiplicação das matrize $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 19 \\ 36 & 43 \end{pmatrix} \text{ e } B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 28 \\ 27 & 40 \end{pmatrix},$$

dizemos que a operação *não é comutativa*.

Convém ressaltar que quando uma operação não é comutativa, não significa que o resultado é sempre diferente quando invertermos a ordem. No Cubo, por exemplo, os movimentos $FB = BF$, $UD = DU$ e $LR = RL$, e assim por diante. No conjunto dos números inteiros, a divisão é, por vezes, comutativa: $\frac{1}{(-1)} = \frac{(-1)}{1}$.

Se todas as sequencias de movimentos aplicados às faces do Cubo fossem comutativas, a solução do cubo seria trivial. Vocês conseguem entender por quê?

b) Movimentos Inversos

Se tomarmos a face da frente do Cubo e aplicarmos um quarto de volta no sentido horário, teremos o movimento F, que pode ser desfeito girando o mesmo um quarto de volta no sentido anti-horário, ou seja, girar a face F em sentido anti-horário um quarto de volta é um movimento oposto a F.

Em matemática, uma operação que *desfaz* uma operação específica é chamada o *inverso* da operação em particular, e o *inverso* é frequentemente indicado com um "-1" no expoente, dessa forma, F^{-1} o movimento oposto a F.

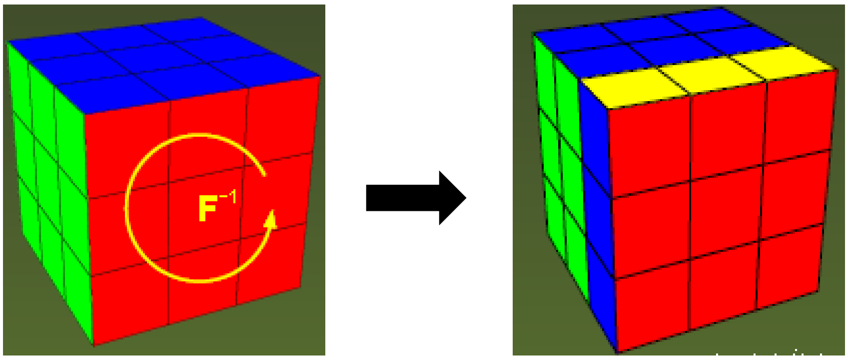

Figura 4: Movimento F^{-1} (SCHÜLTZER, 2005)

Se executarmos um movimento mais complicado, como F seguido de L e de U como será que os movimentos podem ser desfeitos?

Observe que para revetermos a ordem dos movimentos, além da direção das voltas é necessário desfazer a sequência FLU, ou seja, se aplicarmos a sequência $F^{-1}L^{-1}U^{-1}$ não vamos voltar ao Cubo resolvido. Para que o Cubo volte ao seu estado anterior é necessária a seguinte sequência de movimentos $U^{-1}L^{-1}F^{-1}$.

Em geral se $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ são operações que tem inverso $a_1^{-1}, a_2^{-1}, a_3^{-1}, \cdots, a_n^{-1}$ temos que

$$(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \ \cdots \ a_3^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1}.$$

Devido a este fato, é trivial escrever o inverso de uma seqüência de movimentos do Cubo, basta escrever em ordem reversa os opostos dos movimentos individuais.

d) Ordem

Uma vez que estamos olhando para os movimentos que podem ser realizados no Cubo, é importante destacar que o mais importante deles, o movimento de não fazer nada, de deixar o cubo exatamente como era antes. Indicamos este movimento I, e o chamos *identidiade*.

Dessa forma, o movimento $IF = FI = F$, ou seja, não fazer nada e depois fazer F é o mesmo que apenas fazer F. Além disso, $FF^{-1} = I$, pois F seguido de F^{-1} é o mesmo que não fazer nada com o Cubo.

Consideramos o caso em que é necessário aplicar um mesmo movimento três vezes, como, por exemplo, FFF. Este é um tipo de movimento comum de se fazer no Cubo, por esta razão, utilizamos a representação exponencial para indicar que um movimento foi repetido várias vezes.

Assim, para FFF vamos escrever F^3, onde o 3 no expoente indica que o movimento foi repetido três vezes. A notação exponencial pode ser utilizada para aplicar a um grupo de movimentos. Por exemplo, se queremos fazer a seguinte sequência de movimentos $FRFRFRFRFR = (FR)^5$, em outras palavras estamos interessados no movimento FR combinado cinco vezes.

Convém ressaltra que no caso do Cubo Mágico, outra maneira de escrever o inverso F é $FFF = F^3$, em outras palavras, se você aplicar o movimento F mais três vezes, é o mesmo que desfazer o movimento original.

Agora, uma vez que verificámos que a aplicação do movimento F quatro vezes era a mesma não fazer nada, também podemos escrever $F^4 = I$. Como fazemos na maioria das outras áreas da matemática, é razoável definir $F^0 = I$, desde que o expoente zero indique não fazer nada. Do mesmo modo, $F^1 = F$ desde um expoente de 1 corresponda a aplicar o movimento. Neste caso, temos as seguintes potências sucessivas de F: F^1, F^2, F^3, e assim por diante. Observe que F^4 é a primeira vez que o Cubo retorna para a identidade, por esta razão, dizemos que a *ordem* de F é igual a 4.

O que nos parece à primeira vista, um tanto surpreendente é que qualquer movimento do Cubo tem a tal *ordem*. Em outras palavras, se você começar com um cubo resolvido e repetir a operação várias vezes, o cubo acabará por voltar para "resolvido".

Resolvendo o Cubo Mágico

Existem vários métodos para se resolver o Cubo Mágico, alguns são mais simples e rápidos, outros mais complexos e lentos. Dando sequencia as atividades do minicurso apresentaremos um método de resolução do Cubo denominado de Método de Camadas.

Considerações Finais

A nossa proposta é apenas uma possibilidade de trabalho em sala de aula que utiliza um material didático diferente, sublinhando a possibilidade de articulação com os objetivos educacionais. Os desafios para a modificação do ensino estão a postular uma visão da educação de caráter amplo, apontando para uma convergência de esforços na busca da interdisciplinaridade e da contextualização, de forma que ao aprendizado cientifico e matemático faça parte da formação cidadã do individuo.

O jogo pode ser um ótimo recurso didático ou estratégico de ensino para os educadores e pode ser um rico instrumento para a construção do conhecimento. Os jogos, utilizados de forma adequada e com mediação por parte dos educadores, podem ser um agente transformador.

Referências

Fialho, N. (2008) Os Jogos Pedagógicos como Ferramentas de Ensino. In: *VIII Anais do Congresso Nacional de Educação (EDUCERE) e III Congresso Ibero-Americano de Violência nas Escolas (CIAVE).* Curitiba – Paraná.

Grando, R. (1995) *O Jogo e suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino-Aprendizagem da Matemática*. Dissertação de mestrado, Faculdade de Educação da UNICAMP, Campinas.

Moura, M. (1992) *A Construção do Signo Numérico em Situação de Ensino*. Tese de doutorado. São Paulo: USP, 1992.

Kaput, J (2000) *Teaching and learning a new algebra with understanding*. http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/KaputAlgUnd.pdf. Consultado 28/02/2013

Schultzer, W (2005) *Aprendendo Álgebra com o Cubo Mágico*. Uberlândia – MG, http://www.dm.ufscar.br/~waldeck/rubik Consultado 27/02/2013